

Latihan Soal

Bahan Kuliah *I12092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Soal 1

- Misalkan peluang sebuah kota mengalami gempa bumi setiap bulan adalah $1/100$. Diasumsikan bahwa kejadian gempa (atau tidak terjadi gempa) pada setiap bulan independen dari bulan lain. Sebuah perusahaan asuransi menawarkan asuransi rumah terhadap kejadian gempa bumi dengan nilai 10.000 dolar. Biaya asuransi adalah 150 dolar setiap bulan. Misalkan seorang pemilik rumah membayar 150 dolar setiap bulan, dan jika gempa terjadi maka perusahaan membayar 10.000 dolar kepada pemilik rumah, dan pada tahap ini kontrak antara kedua belah pihak berakhir. Berapa keuntungan yang diharapkan perusahaan dari asuransi sebuah rumah?

- Jawaban:

Misalkan X adalah jumlah bulan sampai sebuah gempa terjadi.
Keuntungan perusahaan asuransi adalah:

$$Y = 150X - 10000$$

X adalah peubah acak dari distribusi geometrik dengan

$$p = 1/100$$

$$E(X) = 1/p = 100$$

Keuntungan yang diharapkan perusahaan asuransi adalah:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(150X - 10000) = 150E(X) - E(10000) \\ &= (150)(100) - 10000 \\ &= 5000 \end{aligned}$$

Soal 2

Dalam sebuah keluarga dengan 4 anak,

(a) tentukan peluang keluarga tersebut memiliki paling sedikit 1 anak laki-laki dengan asumsi peluang kelahiran anak laki-laki adalah $\frac{1}{2}$

(b) Dari 2000 keluarga dengan 4 anak, berapa banyak keluarga yang memiliki paling sedikit 1 anak laki-laki?

- Jawaban:

$$p = \frac{1}{2} ; q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; n = 4$$

Misalkan X menyatakan banyaknya anak laki-laki di dalam keluarga dengan 4 anak, maka

$$\begin{aligned} \text{(a) } P(1 \leq X \leq 4) &= \sum_{x=1}^4 b(x;4,0.5) = \sum_{x=0}^4 b(x;4,0.5) - \sum_{x=0}^0 b(x;4,0.5) \\ &= 1.0 - 0.0625 = 0.9375 \end{aligned}$$

$$\text{(b) Jumlah ekspektasi} = (2000)(0.9375) = 1875$$

Soal 3

Jika 20% dari baut-baut yang diproduksi oleh suatu mesin rusak, tentukan peluang bahwa dari 4 baut yang dipilih secara acak terdapat

(a) 1

(b) 0

(c) kurang dari 2

yang rusak

- Jawaban:

$$(a) P(X = 1) = b(1; 4, 0.2) = \binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3 = 0.4096$$

$$(b) P(X = 0) = b(0; 4, 0.2) = \binom{4}{0}(0.2)^1(0.8)^3 = 0.4096$$

$$(c) P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.4096 + 0.4096 \\ = 0.8192$$

Soal 4

Sepuluh persen dari alat-alat yang diproduksi dalam suatu proses fabrikasi tertentu ternyata rusak. Tentukan peluang bahwa dalam suatu sampel dari 10 alat yang dipilih secara acak, tepat ada 2 alat yang rusak dengan menggunakan:

(a) distribusi binomial

(b) aproksimasi Poisson terhadap distribusi binomial

- Jawaban:

(a) $p = 0.1$; misalkan X menyatakan peubah acak yang menyatakan banyaknya alat yang rusak

$$P(X = 2) = b(2; 10, 0.1) = \binom{10}{2} (0.1)^2 (0.9)^8 = 0.1937$$

(b) $\lambda t = \mu = np = (10)(0.1) = 1.0$

$$P(X = 2) = p(x; 1.0) = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = 0.1839$$

Secara umum, aproksimasi tsb dianggap bagus jika $p \leq 0.1$ dan $\lambda t = \mu = np \leq 5$.

Soal 5

Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Sebuah bola dipilih secara acak dari kotak, warnanya dicatat, dan kemudian bolanya dimasukkan kembali. Tentukan peluang bahwa dari 6 bola yang diambil secara acak dengan cara ini, 3 diantaranya berwarna merah, 2 adalah putih, dan 1 biru.

Jawaban:

- **Cara 1:** (menggunakan rumus distribusi multinomial)

$$P(\text{merah pada sembarang pengambilan}) = 5/12$$

$$P(\text{putih pada sembarang pengambilan}) = 4/12$$

$$P(\text{biru pada sembarang pengambilan}) = 3/12$$

$$n = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$P(3 \text{ merah, } 2 \text{ putih, } 1 \text{ biru}) = f(3, 2, 1; 5/12, 4/12, 3/12, 6)$$

$$= \binom{6}{3, 2, 1} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{4}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184}$$

- **Cara 2:** Peluang terpilihnya satu bola merah adalah $5/12$, sehingga untuk 3 bola merah peluangnya adalah $(5/12)^3$.
Jadi, peluang untuk memilih 3 bola merah, 2 bola putih, dan 1 bola adalah:

$$(5/12)^3(4/12)^2(3/12)^1$$

Tetapi pilihan yang sama dapat diperoleh dalam urutan yang lain (misalnya putih dulu, baru merah), dan banyaknya cara berbeda adalah

$$C(6; 3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1!}$$

sehingga peluang yang dicari adalah

$$(5/12)^3(4/12)^2(3/12)^1 \frac{6!}{3!2!1!} = 625/5184$$

Soal 6

- Mengacu pada soal 6, jika bola yang telah diambil tidak dikembalikan ke dalam kotak. Tentukan peluang bahwa dari 6 bola yang diambil secara acak dengan cara ini, 3 diantaranya berwarna merah, 2 adalah putih, dan 1 biru.

Jawaban: Ini adalah persoalan distribusi hipergeometrik (kata kunci: tanpa pengembalian)

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$$

$$a_1 = 5, a_2 = 4, a_3 = 3$$

$$N = 5 + 4 + 3 = 12; n = 6$$

Peluang yang dicari adalah:

$$f(3, 2, 1; 5, 4, 3; 6) = \frac{\binom{5}{3} \binom{4}{2} \binom{3}{1}}{\binom{12}{6}}$$

Soal 7

- Pengalaman menunjukkan bahwa pada setiap penstensilan kertas koran, dari 1500 yang distensil telah terjadi kerusakan sebanyak 150 lembar. Bial distensil sebanyak 10 lembar, tentukan peluang banyaknya kertas yang rusak paling sedikit 3 lembar.

Jawaban: Misalkan X adalah peubah acak yang menyatakan banyaknya kertas koran yang rusak.

Ini adalah persoalan distribusi binomial (rusak dan tidak rusak).

$$p = P(\text{rusak}) = 150/1500 = 1/10$$

$$q = 1 - 1/10 = 9/10$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{x=0}^2 b(x;10,0.1)$$

$$= 1 - 0.9298 = 0.0702$$

Soal 8

- Seorang pengusaha sepatu memproduksi 2000 pasang sepatu dan ternyata 2 pasang sepatu diantaranya tidak memenuhi standard mutu. Pengusaha itu mendapat pesanan sebanyak 3000 pasang sepatu dari pak Togar yang akan menjualnya kembali. Berapa peluang
 - (a) Pak Togar mendapat paling banyak 2 pasang sepatu yang tidak memenuhi standard mutu?
 - (b) Pak Togar mendapat lebih dari 3 pasang sepatu yang tidak memenuhi standard mutu?
 - (c) Berapa rata-rata dan simpangan baku dari sepatu yang tidak memenuhi standard mutu yang diperoleh Pak Togar?

- Jawaban: Karena n besar dan p kecil maka lebih baik menggunakan aproksimasi distribusi Poisson.

$$\mu = np = (3000)(0.001) = 3$$

$$(a) P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 p(x,3) = 0.4232$$

$$(b) P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 0.352$$

$$(c) \sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.73$$

Soal 9

- Sekelompok orang terdiri dari 50 orang dan 3 orang diantaranya lahir pada tanggal 31 Desember. Bila secara acak dipilih 5 orang, berapa peluang orang yang terpilih itu:
 - (a) tidak terdapat yang lahir pada tanggal 31 Desember
 - (b) tidak lebih dari 1 orang yang lahir pada tanggal 31 Desember

- Jawaban: gunakan distribusi hipergeometrik

$$P(X = x) = \frac{\binom{3}{x} \binom{47}{5-x}}{\binom{50}{5}}$$

$$(a) P(X = 0) = 0.724$$

$$(b) P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \\ = 0.724 + 0.253 = 0.977$$

Soal 10

- Dari catatan pejabat bank yang memberikan pinjaman kredit bagi pembeli rumah sederhana diketahui bahwa terdapat 30% debitur yang menunggak cicilan rumah. Jika diambil sampel acak sebesar 15 debitur, berapa peluang paling banyak terdapat 5 debitur yang menunggak cicilan rumah?